2010

Tema 2 : NÚMEROS ENTEROS.

Primero de Educación Secundaria Obligatoria. I.e.s Fuentesaúco.

Manuel González de León
mgdl

01/01/2010

Tema 02: Números Enteros.

INDICE:

1.-DE LOS NÚMEROS NATURALES A LOS NÚMEROS ENTEROS:

- Introducción.

  Ante la imposibilidad de hacer ciertas restas en el campo de los números naturales, hay que inventar unos nuevos números: LOS NÚMEROS ENTEROS.

  Ej: 12 y 14 $\in \mathbb{N}$. Como $12 - 14 = x$ y $x \notin \mathbb{N}$, hay que inventar unos nuevos números, los números negativos (en este caso el – 2)

- Concepto.

  El conjunto de los números enteros se representan con la letra "$\mathbb{Z}$".

  Está formado por:

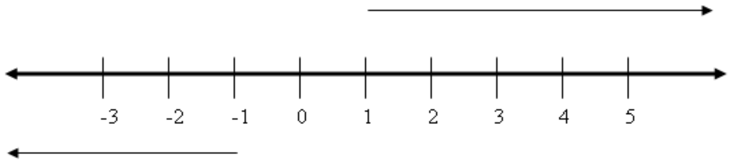
  a. Los enteros positivos: 1, 2, 3, 4, 5, 6, ...
  b. Los enteros negativos: – 1, – 2, – 3, – 4, – 5, – 6 ....
  c. El cero: 0

Por lo tanto

$\mathbb{Z} = \{\dots\dots\dots\dots.. -3, -2, -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3, \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots.\}$

- Representación Gráfica.

  Los números enteros se representan sobre una recta especial: **LA RECTA DE LOS NÚMEROS ENTEROS.**



   a. Entre dos números enteros, el 2 y el 3 por ejemplo, hay un salto.
   b. No hay ningún número entero.
   c. Hay infinitos números decimales.

  Ejercicios: 1, 2 y 3 pg 29

2.-VALOR ABSOLUTO DE UN NÚMERO ENTERO.

- Concepto:

  Es el número que resulta después de suprimir, quitar, borrar el signo de dicho número entero.

  Se indica poniendo el número entre dos barras: | |

  Ejemplo: El valor absoluto del número entero – 5 es $|-5| = 5$

  Ejercicios 4, 5, 6 y 7.

3.-ORDENACIÓN DE LOS NÚMEROS ENTEROS.

Para ordenar dos números enteros, tendremos en cuenta las siguientes normas:

1. Entre dos números positivos es mayor el que tiene mayor valor absoluto.

   Ejemplo 100 $>$ 10 pues $|100| > |10|$
2. Cualquier número positivo es mayor que 0

   Ejemplo 5 $>$ 0
3. Cualquier número positivo es mayor que cualquier número negativo.

   Ejemplo 15 $>$ – 500

4. El 0 es mayor que cualquier número negativo.

   Ejemplo $0 > -5$

5. Entre dos números negativos es mayor el de menor valor absoluto.

   Ejemplo $-5 > -100$

Ejercicio resuelto nº 3 Ejercicios nº 8, 9, 10 y 11 pg 31

4.-SUMA DE NÚMEROS ENTEROS:

Distinguimos tres casos:

a) Suma de dos números enteros con el mismo signo.

Se suman los valores absolutos de los dos números y se conserva el signo

$$4 + 7 = |4| + |7| = 11$$

$$(-4) + (-7) = |4| + |7| = (-11)$$

Ejercicios: Sumar.

7 + 14 = 12 + 3 = 8 + 8 = 5 + 25 =

(-7) + (-14) = (-12) + (-3) = (-8) + (-8) = (-5) + (-25) =

b) Suma de dos números enteros con distinto signo

Para sumar estos dos números:

1. Se restan sus valores absolutos. (al mayor restamos el menor)
2. Al resultado se pone el signo del número que tiene mayor valor absoluto.

Ejemplo:

$$3 + (-7) = |7| - |3| = (-4)$$

Ejercicio: Sumar:

$-15 + 4 =$ $26 + (-8) =$ $-47 + 32 =$ $47 + (-32) =$

c) Suma de varios números con distintos signos.

Existen dos formas:

1. Sumamos los números de dos en dos en el orden que se quiera.

Ejemplo: sumar:

$$\underbrace{4+(-2)}+\underbrace{3+5}+(-6)$$

$$\underbrace{2 \quad + \quad 8} \quad +(-6)$$

$$\underbrace{10 \qquad +(-6)}$$

$$4$$

2. Sumamos por separado los sumandos positivos y los negativos.

Ejemplo: sumar:

$$4+(-2)+3+5+(-6)\ \left\{\begin{array}{l} \boxed{4+3+5=12} \\ \boxed{(-2)+(-6)=(-8)} \end{array}\right. \Rightarrow \boxed{12+(-8)=4}$$

Ejercicios nº 12, 13, 14 y 15

- Propiedades de la suma de los números enteros:

1. Interna: la suma de dos números enteros es otro número entero.

$\forall\ a,b \ \in Z \rightarrow a+b=c\ y\ c\ \in Z$

$4\ y-7\ \in Z\ \rightarrow 4+(-7)=(-3)\ y\ (-3)\in Z$

2. Asociativa: el orden en que se realizan las sumas no modifican el resultado.

$\forall\ a,b\ y\ c\ \in Z\ \rightarrow (\ a+b\ )+\ c=a+(\ b+c\ )$

$$\forall\ (-5),7\ y\ (\ -13)\in Z\ \rightarrow\ \underbrace{[(-5)+7]}+\ (-13)=(-5)+\ \underbrace{[7+(-13)]}$$

$$\boxed{\underbrace{2 \quad +\ (-13)} \quad = \quad \underbrace{(-5)\ + \quad (-6)}}$$

$$\boxed{(-11) \quad = \quad (-11)}$$

3. Conmutativa: el orden de los sumandos no altera el valor de la suma.

$\forall\, a, b \in Z \rightarrow a + b = b + a$

$\forall -5, 7 \in Z \rightarrow \underbrace{-5 + 7}_{2} = \underbrace{7 + (-5)}_{2}$

$\boxed{2 \quad = \quad 2}$

4. Elemento Neutro: el elemento neutro de la suma es el 0.

$\forall\, a \in Z, \exists\, 0 \in Z \rightarrow a + 0 = a$

$\forall\, 3 \in Z, \exists\, 0 \in Z \rightarrow 3 + 0 = 3$

5. Elemento Simétrico: el elemento simétrico en la suma es aquel que sumado al número da como resultado el 0; por lo tanto el elemento simétrico es el opuesto a dicho número.

$\forall\, a \in Z, \exists\, (-a) \in Z \rightarrow a + (-a) = 0$

$\forall\, 5 \in Z, \exists\, (-5) \in Z \rightarrow 5 + (-5) = 0$

Ejercicios nº 12, 13, 14 y 15 Pg 32

5.-OPUESTO DE UN NÚMERO ENTERO:

- Concepto:

  El opuesto de un número entero es otro número entero que cumple:

  1. Tiene el mismo valor absoluto.
  2. Tiene distinto signo.

     Ejemplo: el opuesto de 3 es (– 3) porque

     1. |3| = 3 y |– 3| = 3
     2. 3, tiene signo positivo; (– 3) tiene signo negativo.

- Propiedades:

  1. El opuesto del opuesto de un número es el mismo número.

     Ejemplo ¿Cuál es el opuesto del opuesto del número (– 4)

     op [op (– 4)] = op (4) = (– 4)

2. El opuesto de una suma es igual a la suma de los opuestos de los sumandos.

   Ejemplo:

   op (a + b) = op (a) + op (b)

   $$\text{op}\,[\,\underbrace{3+(-2)}\,] = \underbrace{\text{op}\,(3)} + \underbrace{\text{op}\,(-2)}$$

   $$\underbrace{\text{op}\,(1)} = \underbrace{(-3) + 2}$$

   $$\boxed{(-1) \quad = \quad (-1)}$$

   Ejercicio resuelto nº 5 pg 33

   Ejercicios nº 16, 17, 18 y 19

6.-RESTA DE NÚMEROS ENTEROS.

- Concepto.

  Para restar dos números enteros, se **SUMA** al minuendo el opuesto del sustraendo.

$$\boxed{a} - \boxed{b} = \boxed{a} + \boxed{\text{op (b)}}$$

$$\boxed{a} + \boxed{(-b)}$$

$$\underbrace{\boxed{-5}}_{\boxed{\textbf{MINUENDO}}} - \underbrace{\boxed{(-7)}}_{\boxed{\textbf{SUSTRAENDO}}} = \boxed{-5} + \boxed{\text{op(-7)}}$$

$$\underbrace{\boxed{-5} + \boxed{7}}_{\boxed{2}} \quad \boxed{\textbf{DIFERENCIA}}$$

Ejercicio resuelto nº 6 pg 34 y ejercicios nº 20, 21, 22, y 23

En la práctica lo mejor para restar es quitar paréntesis.

$$(-5) - (-7) = -5 + 7 = 2$$

7.- OPERACIONES DE SUMAS Y RETAS CON PARÉNTESIS.

En las operaciones de sumas y restas con paréntesis podemos realizarlas de dos formas:

1. Resolviendo primero los paréntesis y luego sumando o restando los enteros obtenidos.

$$8 - \underbrace{(4 - 14)} + \underbrace{(-12 + 7)}$$

$$\underbrace{8 - (-10)} + (-5)$$

$$\underbrace{8 + 10} + (-5)$$

$$\underbrace{18 + (-5)}$$

$$\boxed{13}$$

2. Suprimiendo los paréntesis, utilizando la propiedad de los opuestos; si el paréntesis va precedido del signo +, se escriben directamente sus términos; si va precedido del signo -, se cambian los signos de los términos.

$$8 - (4 - 14) + (-12 + 7)$$

$$8 - 4 + 14 - 12 + 7 =$$

$$4 + 14 - 12 + 7 =$$

$$18 - 12 + 7 =$$

$$6 + 7 =$$

$$13$$

8.- MULTIPLICACIÓN O PRODUCTO DE NÚMEROS ENTEROS.

- Concepto.

El producto de dos números enteros es otro número entero que tiene:

a. Por valor absoluto el producto de los valores absolutos de los factores.
b. Por signo, el que corresponde según la regla de los signos del producto.

+	·	+	=	+
+	·	-	=	-
-	·	+	=	-
-	·	-	=	+

Ejemplos:

12 · 5 = |12| · |5| = 12 · 5 = 60

8 · (– 40) = |8| · |– 40|= – (8 · 40) = – 320

– 6 · 15 = |– 6| · 15 = – (6 · 15) = – 90

– 4 · (– 13) = |– 4| · |– 13| = 52

Es decir, si tienen el mismo signo el resultado es positivo; si tienen distinto signo el resultado es negativo.

- Propiedades:

1. Interna: El producto de dos números enteros es otro número entero

$\forall\, a, b \in Z \rightarrow a \cdot b = x$ y $x \in Z$

2 y $-7 \in Z \rightarrow 2 \cdot -7 = -14$ y $-14 \in Z$

2. Conmutativa: El producto de dos números enteros no varía cuando se cambia el orden de los factores.

   $\forall\, a, b \ \in Z \ \rightarrow a \cdot b = b \ \cdot a$

   $4\ y - 5 \ \in Z \ \rightarrow \underbrace{4 \ \cdot (-5)}_{\boxed{-20}} = \underbrace{(-5) \cdot 4}_{\boxed{-20}}$

3. Asociativa: El producto de tres números enteros no varía cuando se asocian los factores de modo distinto.

   $\forall\, a, b\ y\ c \ \rightarrow (a \ \cdot b) \cdot c = a \cdot (\ b \ \cdot c\ )$

   $-12, 8\ y - 5 \ \rightarrow (\underbrace{-12 \ \cdot 8}\ ) \cdot (-5) = \ -12 \ \cdot [\ \underbrace{8 \ \cdot (-5)}]$

   $$\underbrace{-96 \ \cdot \ (-5)}_{480} \ = \ \underbrace{-12 \ \cdot \ (\ -40)}_{480}$$

4. Elemento Neutro: $480 \quad = \quad 480$

   $\forall\, a \ \in Z \ \exists\ el\ n^{º}\ 1 \ \in Z \ \rightarrow a \ \cdot 1 = a$

   $13 \ \in Z \ \exists\ 1 \in Z \ \rightarrow 13 \ \cdot 1 = 13$

5. Distributiva del la multiplicación respecto a la suma.

   El producto de un número entero por una suma es igual a la suma de los productos del número entero por cada uno de los sumandos.

   $\forall\, a, b\ y\ c \ \in Z \rightarrow a \ \cdot (b + c\ ) = \ a \ \cdot b + a \ \cdot c$

   $-5, -3\ y\ 7 \ \rightarrow \ -5 \ \cdot \underbrace{(\ -3 \ + 7\ )} = \ \underbrace{-5 \ \cdot (-3)} \ + \underbrace{(-5) \cdot 7}$

   $$\underbrace{-5 \cdot \ 4}_{\boxed{-20}} \quad = \quad \underbrace{15 \quad + \ (\ -35)}_{\boxed{-20}}$$

   Otro ejemplo.

   $-4 \ \cdot \underbrace{[\ 8 + (-5) + \ (-2)\ ]} = \ \underbrace{-4 \ \cdot 8} + \underbrace{(-4) \ \cdot (-5)} + \ \underbrace{(-4) \ \cdot (-2)}$

   $$\underbrace{-4 \ \cdot \qquad 1}_{\boxed{-4}} \qquad = \qquad \underbrace{-32 \ + \quad 20 \quad + \quad 8}_{\boxed{-4}}$$

Esta propiedad permite:

a. Convertir un producto en suma.

$$-5 \cdot (-3+7) =$$
$$-5 \cdot (-3) + -5 \cdot 7$$

b. Convertir una suma en producto.

$$-5 \cdot (-3) + -5 \cdot 7 =$$
$$-5 \cdot (-3+7)$$

Ejercicio resuelto nº 7. Ejercicios nº 24 y 25 pg 35

9.- SACAR FACTOR COMÚN.

- Concepto:

Una suma de números enteros puede escribirse en forma de producto, si todos los sumandos poseen un factor común.

La operación que pasa de la suma al producto se llama: **SACAR FACTOR COMÚN.**

$\forall\, a, b, c \in Z \rightarrow a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c)$

$2, 3\ y\ 5 \in Z \rightarrow 2 \cdot 3 + 2 \cdot 5 = 2 \cdot (3 + 5)$

Una suma En un producto

$\square + \square$ $\square \cdot \square$

Ejemplo: Una suma

6	+	10
2 · 3	+	2 · 5

Pasa a una multiplicación

2	·	(3 + 5)
2	·	8

Como puede haber sumas con 3, 4,… sumandos se tiene que sacar factor común en cada uno de los sumandos

Ejemplo.

- Suma de tres sumandos:

  – 3 · 4 + (– 3) · 5 + (– 3) · 7

  – 3 · (4 + 5 + 7)

  – 3 · 16

- Suma de cuatro sumandos:

  2 · 3 + 2 · 5 + 2 · 7 + 2 · 11

  2 · (3 + 5 + 7 + 11)

  2 · 26

Como cualquier número entero puede escribirse como resultado del producto de dos factores, puede ocurrir que a primera vista no aparezcan, pero nosotros podemos escribir el producto y sustituirlo para después sacar factor común.

Ejemplo. 3 · 2 + 3 · 5 + 12 · 7

En el primer sumando, el rojo, hay dos factores que son los números 3 y 2

En el segundo sumando, el azul, hay también dos factores, los números 3 y 5

Como vemos en estos dos sumandos, el rojo y el azul, el número que se repite es el factor 3, por lo tanto, en el sumado amarillo debe aparecer el número 3.

$12 = 3 \cdot 4 \rightarrow 12 \cdot 7 \rightarrow 3 \cdot 4 \cdot 7 \rightarrow 3 \cdot 28$

Sustituimos.

$3 \cdot 2 + 3 \cdot 5 + 12 \cdot 7 \rightarrow 3 \cdot 2 + 3 \cdot 5 + 3 \cdot 28$

Y sacamos factor común al número 3

$3 \cdot (2 + 5 + 28)$

Ejercicios resueltos nº 10 y 11. Ejercicios nº 36, 37 y 38

10.- DIVISIÓN EXACTA DE NÚMEROS ENTEROS:

- Concepto.

El cociente de dos números enteros es otro número entero que tiene:

a. Por valor absoluto el cociente de los valores absolutos.
b. Por signo, el que corresponde según la regla de los signos del producto.

+	:	+	=	+
+	:	-	=	-
-	:	+	=	-
-	:	-	=	+

Ejemplos:

$12 : 4 = |12| \cdot |4| = 12 : 4 = 3$ $\qquad$ $-48 : 6 = |-48| \cdot |6| = -(48 \cdot 6) = -8$

$12 : (-4) = |12| : |-4| = -(12 : 4) = -3$ $\qquad$ $-48 \cdot (-6) = |-48| \cdot |-6| = 8$

Es decir, si tienen el mismo signo el resultado es positivo; si tienen distinto signo el resultado es negativo.

Ejercicio resuelto nº 8. Ejercicios nº 26, 27, 28, 29 y 30

11.- OPERACIONES COMBINADAS CON MÚMEROS ENTEROS.

Existen dos casos:

a. Cálculo sin operaciones en los paréntesis.

Cuando no hay operaciones indicadas entre paréntesis, se hacen las operaciones de izquierda a derecha en el siguiente orden:

1. Multiplicaciones y divisiones.
2. Sumas y restas

Ejemplo:

$$\underbrace{-5 \cdot 6} + \underbrace{(-4) \cdot 8} + 30$$
$$\underbrace{(-30) + (-32)} + 30$$
$$\underbrace{(-62) + 30}$$
$$\boxed{-32}$$

$$\underbrace{-30 : 6} + \underbrace{(-3) \cdot 4} + 14$$
$$\underbrace{-5 + (-12)} + 14$$
$$\underbrace{(-17) + 14}$$
$$\boxed{-3}$$

b. Cálculo con operaciones indicadas en los paréntesis.

Cuándo hay operaciones indicadas entre paréntesis, se hace las operaciones por este orden:

1. Se resuelven las operaciones que están dentro de los paréntesis.
2. Se hacen las multiplicaciones y divisiones.
3. Por último, la sumas y las restas.

Ejemplo:

$$-12 + [8 + (-14) : 2] + [-7 + (-9)\cdot 5]$$

$$-12 + [8 + (-7)] + [-7 + (-45)]$$

$$-12 + 1 + (-52)$$

$$-11 + (-52)$$

$$\boxed{(-62)}$$

Ejercicio resuelto nº 12 Ejercicios nº 39 y 40

12.- RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS.

Para resolver este tipo de problemas, podemos seguir los siguientes pasos:

1. Leer el problema, entender todas las palabras y saber lo que nos preguntan.
2. Tantear para comprender mejor.
3. Hacer una tabla.
4. Resolver el problema.
5. Comprobar el resultado.

Ejemplo: La suma de dos números enteros es igual a – 19 y su producto es igual a 60. ¿Cuáles son los números?

1. Leemos el problema, tenemos que descubrir 2 números.
2. Tanteamos : $-19 = -29 + 10$ $\quad -29 \cdot 10 = -290$

   Los dos tienen que tener el mismo signo

3. Hacemos la tabla.

Negativos que suman -19	Negativos cuyo producto es 60
$-1+(-18) = -19$	$-1\cdot(-18) \neq 60$
$-2+(-17) = -19$	$-2\cdot(-17) \neq 60$
$-3+(-16) = -19$	$-3\cdot(-16) \neq 60$
$-4+(-15) = -19$	$-4\cdot(-15) = 60$

4. Resolvemos: los números son el -4 y el -15
5. Comprobamos

$$-4+(-15) = -19 \qquad -4\cdot(-15) = 60$$

Ejercicio. La suma de dos números es -18 y su multiplicación es -45. ¿Calcular dichos números?