TEMA 2: POTENCIAS Y RAÍCES CUADRADAS

Segundo Curso de Educación Secundaria Obligatoria. I.E.S de Fuentesaúco.

Manuel González de León.

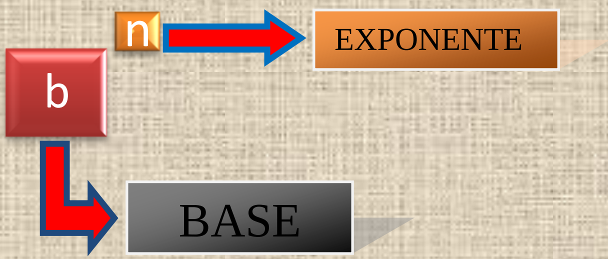
CURSO 2011 -2012

TEMA 2. POTENCIAS Y RAÍCES CUADRADAS

1. Potencias de base entera y exponente natural.
2. Operaciones con Potencias.
3. Cuadrados Perfectos y Raíces Cuadradas.
4. Regla para el cálculo de la raíz cuadrada.
5. Operaciones con raíces cuadradas exactas.
6. Jerarquía de la operaciones

1.- Potencias de base entera y exponente natural:.

- **Elementos:**



- **Concepto:**

Llamamos potencia "n" de un número "b", llamado base, al número que resulta de multiplicar tantas veces la base "b" como indica el exponente "n"

$$b^n = \underbrace{b \cdot b \cdot b \cdot b \cdot \ldots\ldots\ldots\ldots b}_{n}$$

Ejemplo:

$3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$

$(-5)^3 = (-5) \cdot (-5) \cdot (-5) = -125$

Por lo tanto podemos decir que una potencia es una forma abreviada de escribir una multiplicación de factores iguales.

La base de la potencia es el factor que se repite.

El exponente de la potencia es el número de veces que se repite.

Si el exponente de la potencia es:

2: se llama cuadrado.

3: se llama cubo.

- **Potencias de base un número negativo.**

$(-b)^{n}$ = a un número negativo si n es impar

$(-b)^{n}$ = a un número positivo si n es par

Por lo tano; la potencia de base un número negativo elevado a un exponente natural puede ser:

- Positivo: si la potencia es par.
- Negativo: si la potencia es impar.

Ejercicio resuelto nº 1 y ejercicios 1, 2 y 3, pg. 25

- **Potencias notables:**

  Llamamos potencias notables, a aquellas potencias que tienen bien como base, bien como exponentes al número 0 y 1.

$$a^{0} = 1$$

$$0^{n} = 0$$

$$a^{1} = a$$

$$1^{n} = 1$$

2.- Operaciones con Potencias::.

- **Suma y resta de potencias :**

  Para efectuar una suma o resta de potencias, basta con calcularlas y realizar las sumas o restas que se indiquen.

  Ejemplo:

  $2^2 + 3^3 = 2·2 + 3·3·3 = 4 + 21 = 25$ $\qquad$ $2^3 + 2^4 = 2·2·2 + 2·2·2·2 = 8 + 16 = 25$

  $3^2 + 3^3 – 3^4 = 3·3 + 3·3·3 – 3·3·3·3 = 9 + 27 – 81 = – 45$

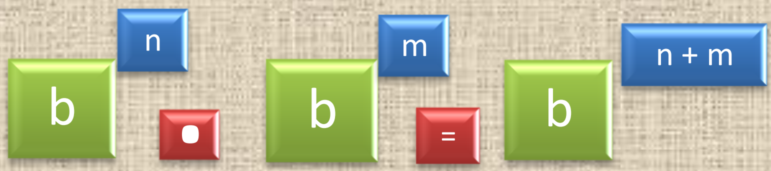
Recuerda

$$2^{3} + 2^{4} \neq 2^{7}$$

- **Producto de potencias de la misma base:**

Es otra potencia que tiene:

- Por base la misma base.
- Por exponente la suma de los exponentes.

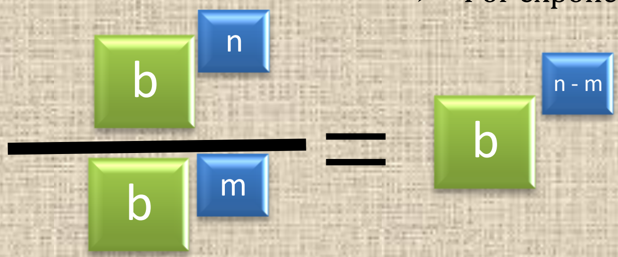


$4^3 \cdot 4^2 = 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^5 = 4^{3+2}$

- **Cociente de potencias de la misma base:**

Es otra potencia que tiene:

- Por base la misma base.
- Por exponente la resta de los exponentes.



$$\frac{3^5}{3^2} = \frac{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}{3 \cdot 3} = 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^3 = 3^{5-2}$$

De este caso se deduce una de las potencias notables.

$$3^0 = 1 \rightarrow 3^{4-4} = \frac{3^4}{3^4} = \frac{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3} = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$$

- **Potencia de una potencia:**

  Es otra potencia que tiene:

  - Por base la misma base de la potencia de partida.
  - Por exponente, el producto de los exponentes.

$$\left[b^{n} \right]^{m} = b^{n \cdot m}$$

$$[\,3^2]^4 = 3^2 \cdot 3^2 \cdot 3^2 \cdot 3^2 =$$

$$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^8 = 3^{2 \cdot 4}$$

- **Producto de potencias del mismo exponente:**

  Es otra potencia que tiene:

  - Por base el producto de las bases.
  - Por exponente, el mismo exponentes.

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b\,)^n$$

$$3^2 \cdot 4^2 = (\,3 \cdot 4\,)^2 = 12^2$$

- **Cociente de potencias del mismo exponente:**

  Es otra potencia que tiene:

  - Por base el cociente de las bases.
  - Por exponente, el mismo exponentes.

$$a^n : b^n = (a : b\,)^n$$

$$8^2 : 4^2 = (\,8 : 4\,)^2 = 2^2$$

3.- CUADRADOS PERFECTOS Y RAICES CUADRADAS::.

a. Cuadrado perfecto

- **Concepto**

  Decimos que un número es un cuadrado perfecto, cuando su raíz cuadrada es exacta.

  Llamamos raíz cuadrada de un número a otro número tal que al multiplicarlo por si mismo, nos da el número original.

$$\sqrt{a} = \sqrt[2]{a} = b \rightarrow \; b^2 = a$$

  Ejemplo:

$$\sqrt{25} = 5 \; \rightarrow 5^2 = 25$$

$$\sqrt{9} = 3 \; \rightarrow \; 3^2 = 9$$

$$\sqrt{49} = 7 \; \rightarrow \; 7^2 = 49$$

- **Propiedades.**

  Un cuadrado perfecto solo puede terminar en una de las siguientes cifras: 0, 1, 4, 5, 6 y 9.

  Puesto que:

  El cuadrado de todos los números que terminan en 0 es : 0
  " " " " " " " " " 1 y 9 es : 1
  " " " " " " " " " 2 y 8 es : 4
  " " " " " " " " " 3 y 7 es : 9
  " " " " " " " " " 4 y 6 es : 6
  " " " " " " " " " 5 es : 5

  Tabla de los cuadrados hasta el 20

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144	169	196	225	256	289	324	361	400

- **Elementos de una raíz.**

$$\sqrt[2]{9} = 3$$

2 ⟶ Índice de la raíz, en este caso se dice cuadrada
$\sqrt{\ }$ ⟶ Radical.
9 ⟶ Radicando.
3 ⟶ Raíz Cuadrada.

- **Raíz Cuadrada entera.**

  La raíz cuadrada entera de un número, es la raíz cuadrada del mayor número cuadrado perfecto contenido en él.

  La diferencia entre el radicando y el cuadrado perfecto es el resto de la raíz cuadrada entera

  Ejemplo:

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{40} & 6 \\ -36 & \\ \hline 04 & \end{array} \longrightarrow \boxed{6^2 + 4 = 40 \rightarrow \text{resto } 4}$$

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{31} & 5 \\ -25 & \\ \hline 06 & \end{array} \quad \boxed{5^2 + 6 = 31 \rightarrow \text{resto } 6}$$

- **Condición del resto de una raíz.**

  El resto de una raíz cuadrada entera debe ser menor que el doble de la raíz más 1

$$R < 2 \cdot \text{raíz} + 1 \qquad 6 < 2 \cdot 5 + 1$$

4.- REGLA PARA EL CÁLCULO DE LA RAÍZ CUADRADA::.

- Para calcular la raíz cuadrada de un número seguiremos los siguientes pasos:

1. Separamos el radicando de dos en dos comenzando por la derecha.
2. Calculamos la raíz cuadrada del primer grupo empezando por la izquierda.
3. Restamos del primer grupo de la izquierda, el cuadrado de su raíz entera y bajamos las dos cifras siguientes.
4. Multiplicamos por dos la primera cifra de la raíz y buscamos el mayor entero "d" tal que el doble de la raíz con "d" y por "d", se pueda restar al radicando. Subimos esa cifra a la raíz.
5. El resto de la raíz es la nueva diferencia.

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{6\,\overparen{43}} & 2\,5 \\ \cline{2-2} -4 & 4\,5 \cdot 5 = 2\,2\,5 \\ \hline 2\,4\,3 & \\ -2\,2\,5 & \\ \hline 1\,8 & \end{array}$$

- **Aproximación decimal de la raíz cuadrada**

  Para calcular los decimales simplemente se coloca la coma decimal en la raíz y en el radicando y se añaden dos ceros; posteriormente se sigue como al principio.

```
√ 5 6 4 , 0 0     | 2 3 , 7
 – 4              |----------
   1 6 4          | 4 3 · 3 = 1 2 9
 – 1 2 9          |----------------
     0 3 5 0 0    | 4 6 7 · 7 = 3 2 6 9
 –     3 2 6 9    |
         2, 31    |
```

$23{,}7^2 + 2{,}31 = 564$ $\qquad$ $2{,}31 < 2 \cdot 23{,}7 + 1$

5.- OPERACIONES CON RAICES CUADRADAS::.

- **Introducción.**

  De la definición de cuadrado perfecto que decía que un número es un cuadrado perfecto cuando su raíz cuadrada es exacta, se deduce que:

  La raíz cuadrada de un cuadrado perfecto es la base del cuadrado.

  $\sqrt{3^2} = 3 \rightarrow 3^2$ es un cuadrado perfecto $\rightarrow 3^2 = 9$ y $\sqrt{9} = 3 \rightarrow \sqrt{3^2} = 3$

  Otros ejemplos:

  $\sqrt{5^2} = 5$ $\qquad$ $\sqrt{7^2} = 7$ $\qquad$ $\sqrt{40^2} = 40$

- **Producto de raíces cuadras exactas.**

  El producto de dos raíces exactas es:

  - Otra raíz exacta.
  - Su radicando es igual al producto de los radicandos de los factores.

  $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$

  $\sqrt{36} \cdot \sqrt{49} = \sqrt{36 \cdot 49}$

  $6 \cdot 7 = \sqrt{(6 \cdot 7)^2}$

  $42 = 42$

Por lo tanto podemos escribir un producto de raíces como una raíz y a la inversa.

$$\sqrt{4}\cdot\sqrt{9}\cdot\sqrt{25} = \sqrt{900}$$

0

$$\sqrt{900} = \sqrt{4}\cdot\sqrt{9}\cdot\sqrt{25}$$

- **Cociente de dos raíces exactas.**

  El cociente de dos raíces exactas es:

  - Otra raíz exacta.
  - Su radicando es igual al cociente de los radicandos de los factores.

$$\sqrt{a} : \sqrt{b} = \sqrt{a : b}$$

$$\sqrt{36} : \sqrt{9} = \sqrt{36 : 9}$$

$$\boxed{\underbrace{6 : 3}_{2} = \underbrace{\sqrt{4}}_{2}}$$

Por lo tanto podemos escribir un cociente de raíces como una raíz y a la inversa.

$$\sqrt{100} : \sqrt{25} = \sqrt{4}$$

0

$$\sqrt{4} = \sqrt{100} : \sqrt{25}$$

- **Potencia de una raíz cuadrada exacta.**

  La potencia de base una raíz exactas es:

  - Otra raíz exacta.
  - Su radicando es igual al radicando elevado a la potencia.

$$\left(\sqrt{a}\right)^b = \sqrt{(a)^b}$$

$$\left(\sqrt{4}\right)^2 = \sqrt{(4)^2}$$

$$\boxed{\begin{array}{ccc} (2)^2 & = & \sqrt{16} \\ 4 & = & 4 \end{array}}$$

6.- JERARQUÍA DE LAS OPERACIONES::.

En las operaciones combinadas con potencias y raíces el orden a seguir es:

1º	PARENTESIS Y CORCHETES	( ) y [ ]
2º	POTENCIAS Y RAICES	a^2 y $\sqrt{\ }$
3º	MULTIPLICACIONES Y DIVISIONES DE IZQUIERDA A DERECHA	. y :
4º	SUMAS Y RESTAS	+ y -

Ejemplo:

$$-3 + \underbrace{[\,5 - (-1)]}^{2} \cdot 2 - \sqrt{25}$$
$$-3 + [\,6\,]^2 \cdot 2 - \sqrt{25}$$
$$-3 + \underbrace{36 \cdot 2} - 5$$
$$\underbrace{-3 + 72 - 5}_{64}$$

$$10 + 54 : (-3)^2 \cdot \sqrt{18 + (-2)}$$
$$10 + 54 : 9 \cdot \sqrt{16}$$
$$10 + 54 : 9 \cdot 4$$
$$10 + 6 \cdot 4$$
$$10 + 24$$
$$34$$