2010

Tema 04:Fracciones.

Primero de Educación Secundaria Obligatoria. I.e.s Fuentesaúco.

Manuel González de León.
mgdl
01/01/2010

Tema 04: Las Fracciones.

INDICE:

1.-APARICIÓN DE LAS FRACCIONES.:

Ante la imposibilidad de realizar ciertas divisiones en el campo de los números enteros (Z), hay que inventar unos nuevos números. LOS NÚMEROS RACIONALES O FRACCIONES.

Se representan con la letra Q.

Ejemplo: 2 y $3 \in Z$, como $2 : 3 = x$ y $x \notin Z \rightarrow 2 : 3 = \frac{2}{3} \in Q$.

2.-CONCEPTO DE FRACCIÓN.:

Una fracción está formada por una pareja de números enteros:

- El primero, llamado numerador, con un criterio de multiplicar.
- El segundo, llamado denominador, con un criterio de dividir, y con la condición, de que el denominador no sea cero.

$$\frac{a}{b} \in Q \; si \; a, b \in Z \; y \; b \neq 0$$

$$\frac{4}{3} \in Q; \frac{-2}{5} \in Q; \frac{4}{0} \notin Q \; pués \; no \; hay \; solución.$$

3.-FRACCIONES PARA EXPRESAR PARTES.:

Una fracción expresa parte de un todo. Se representa:

$$\frac{Numerador}{Denominador}$$

El denominador indica el número de partes iguales en la que se divide el todo y el numerador indica el número de partes que se toman.

Ejercicios resueltos 1 y 2 y ejercicios 1, 2 y 3 pg 67.

4.- LA FRACCIÓN COMO DIVISIÓN.:

Una fracción es una división.

Una fracción es igual a un número decimal o a un número entero que se obtiene dividiendo el numerador entre el denominador.

Ejemplo:

$$\frac{3}{4} = 0{,}75 \; ; \frac{7}{10} = 0{,}7 \; ; \frac{8}{4} = 2$$

5.- LA FRACCIÓN COMO OPERADOR.:

Una fracción actua como operador de un número de la siguiente manera:

– El numerador multiplica a dicho número.

– El denominador divide al resultado obtenido.

Ejemplo:

$$Los\ \frac{4}{5}\ de\ 60 \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{4}{5}\cdot 60 = \frac{4\cdot 60}{5};\ \frac{240}{5} = 48 \\ \frac{4}{5}\cdot 60 = \frac{60}{5}\cdot 4\,;12\cdot 4 = 48 \end{array} \right.$$

$$El\ 5\ \%\ de\ 40 \quad \left\{ \frac{5}{10\cancel{0}}\cdot 4\cancel{0} = \frac{5}{10}\cdot 4\,;\ \frac{2\cancel{0}}{1\cancel{0}} = 2 \right.$$

$$Los\ \frac{4}{5}\ del\ 5\ \%\ de\ 800 \quad \left\{ \frac{4}{\cancel{5}}\cdot\frac{\cancel{5}}{10\cancel{0}}\cdot 8\cancel{00} = 4\cdot 8 = 32 \right.$$

6.- TIPOS DE FRACCIONES.:

- Fracción Propia:

  Es aquella fracción que tiene el numerador menor que el denominador.

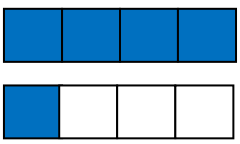
  Ejemplo: $\frac{3}{4}$

- Fracción Impropia:

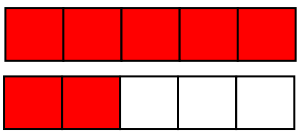
  Es aquella fracción que tiene el numerador mayor que el denominador.

  Ejemplo:

$\frac{5}{4}$

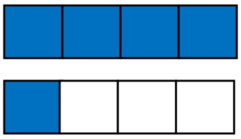


$\frac{7}{5}$

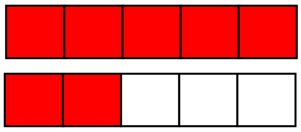


Estas fracciones dan lugar a los números mixtos, compuesto por la suma de un número entero y una fracción.

Ejemplo:



$1\,\frac{1}{4}$



$1\,\frac{2}{5}$

- Conversión de una fracción impropia en un número mixto:
    1. Se divide el numerador entre el denominador.
    2. El cociente de la división es el número entero.
    3. El divisor es el denominador de la fracción.
    4. El resto es el numerador de la fracción.

Ejemplo:

$\frac{5}{4}$ $\quad \begin{array}{r|l} 5 & 4 \\ \hline 1 & 1 \end{array} \longrightarrow 1\,\frac{1}{4}$

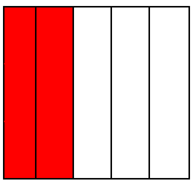
$\frac{17}{5}$ $\quad \begin{array}{r|l} 17 & 5 \\ \hline 2 & 3 \end{array} \longrightarrow 3\,\frac{2}{5}$

Ejercicios: 22 y 23 pg. 76

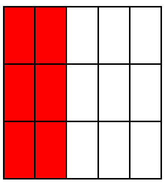
7.- FRACCIONES EQUIVALENTES.:

- Concepto:

  Dos fracciones son equivalentes si representa la misma parte del todo.



$\frac{2}{5}$



$\frac{6}{15}$

- Como saber si dos fracciones son equivalentes.

Para saber si dos fracciones son equivalentes podemos utilizar los siguientes métodos:

1. Dos fracciones son equivalentes si el producto de extremos es igual al producto de los medios.

   Ejemplo:

   $$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \rightarrow a \cdot d = b \cdot c$$

   Ejemplo: ¿La fracción $\frac{3}{5}$ es equivalente a la fracción $\frac{42}{70}$?

   Producto de extremos: $3 \cdot 70 = 210$

   Producto de medios: $5 \cdot 42 = 210$

   → $210 = 210$
   Si son equivalentes

   Ejemplo: ¿La fracción $\frac{4}{5}$ es equivalentes a la fracción $\frac{52}{60}$?

   Producto de extremos : $4 \cdot 60 = 240$

   Producto de medios: $5 \cdot 52 = 260$

   → $240 \neq 260$
   No son equivalentes

2. Dos fracciones son equivalentes cuando al hacer la división dan el mismo resultado:

   Ejemplo: ¿La fracción $\frac{3}{5}$ es equivalente a la fracción $\frac{42}{70}$?

   $\frac{3}{5} \rightarrow 3 : 5 = 0{,}6$

   $\frac{42}{70} \rightarrow 42 : 70 = 0{,}6$

   → 0,6 = 0,6
   Si son equivalentes

3. Dos fracciones son equivalentes cuando al actuar como operadores sobre un mismo número, da el mismo resultado.

   Ejemplo: ¿La fracción $\frac{3}{4}$ es equivalente a la fracción $\frac{39}{52}$?

   $\frac{3}{4}\ de\ 52 \rightarrow \frac{3}{4} \cdot 52 = \frac{156}{4} = 39$

   $\frac{39}{52}\ de\ 52 \rightarrow \frac{39}{\cancel{52}} \cdot \cancel{52} = 39$

   Ejercicio resuelto nº 3 pg 68

   Ejercicios nº 4 y 5.

8.- PROPIEDAD FUNDAMENTAL DE LAS FRACCIONES.:

- Una fracción no varía si multiplicamos o dividimos al numerador y el denominador de la fracción por un mismo número.

  Ejemplo $\frac{9}{15}$

  Multiplicamos por 5 $\longrightarrow \frac{9 \cdot 5}{15 \cdot 5} = \frac{45}{75}$

  Dividimos entre 3 $\longrightarrow \frac{9:3}{15:3} = \frac{3}{5}$

- Maneras de hallar fracciones equivalentes a una dada.

  Nos valemos de la propiedad fundamental de las fracciones.

  Ejemplo: escribe fracciones equivalentes a $\frac{2}{3}, -\frac{1}{2}, \frac{7}{5}$

  $$\frac{2}{3} \overset{\cdot 2}{\underset{\cdot 2}{=}} \frac{4}{6} \overset{\cdot 3}{\underset{\cdot 3}{=}} \frac{6}{9}$$

  $$\frac{-1}{2} = \frac{2}{-4} = -\frac{4}{8}$$

  $$\frac{7}{5} = \frac{14}{10} = \frac{21}{15}$$

  Ejercicios nº 6, 7 y 8 pg 69.

9.- SIMPLIFICACIÓN DE FRACCIONES.:

- Concepto:

  Simplificar una fracción es convertirla en otra equivalente e irreducible.

  Para ello se divide el numerador y el denominador de la fracción por los divisores comunes.

  Ejercicio resuelto nº 4

- Fracción irreducible:

  Llamamos así a aquella fracción que no se puede simplificar más.

  Para ello se divide el numerador y el denominador por el m.c.d

Ejemplo. Calcula la fracción irreducible de $\frac{140}{630}$ y $\frac{150}{120}$

10.- REDUCCIÓN DE FRACCIONES A COMÚN DENOMINADOR.:

Para reducir fracciones a común denominador:

- Se pone como denominador el producto de dominadores.
- Se multiplica cada numerador por todos los denominadores menos por el suyo.

Ejercicio resuelto nº 5 y ejercicios 11 y 12. Pg 73

11.- REDUCCIÓN DE FRACCIONES A MÍNIMO COMÚN DENOMINADOR.:

Para ello nos ayudamos del m.c.m. de los denominadores.

1. Ponemos como denominador el m.c.m. de los denominadores.
2. Dividimos al m.c.m. por cada denominador.
3. Multiplicamos cada numerador por el cociente de la división que corresponda.

   Ejercicio resuelto nº 6 pg 72 y ejercicios nº 13 y 14

12.- COMPARACIÓN DE FRACCIONES.:

Comparar fracciones es definir cuáles son mayores o menores para después ordenarlas.

- Con el mismo denominador:

  Si dos fracciones tienen el mismo denominador, es mayor la que tiene mayor numerador:

$$\frac{5}{8} > \frac{3}{8}$$

- Con el mismo numerador:

  Si dos fracciones tienen el mismo numerador, es mayor la que tiene menor denominador

$$\frac{5}{7} > \frac{5}{9}$$

- Con numeradores y denominadores distintos.

  Utilizaremos dos métodos:

  a. Reduciendo las fracciones a un común denominador.

     Ejemplo: Ordena de mayor a menor las siguientes fracciones:

$$\frac{7}{10}\ ;\ \frac{-13}{12}\ ;\ \frac{1}{15}\ ;\ \frac{-1}{2}$$

m.c.m. (10, 12, 15 y 2)

$$\begin{array}{r|l} 10 & 2 \\ 5 & 5 \\ 1 & 1 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & 1 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & 1 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 2 & 2 \\ 1 & 1 \\ 1 & \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} 10 = 2 \cdot 5 \cdot 1 \\ 12 = 2^2 \cdot 3 \cdot 1 \\ 15 = 3 \cdot 5 \cdot 1 \\ 2 = 2 \cdot 1 \end{array}\right\} \quad \boxed{\text{m.c.m. (10, 12, 15 y 2)} = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 1 = 60}$$

$$\frac{7}{10} = \frac{42}{60};\qquad \frac{-13}{12} = \frac{-65}{60};\qquad \frac{1}{15} = \frac{4}{60};\qquad \frac{-1}{2} = \frac{-30}{60}$$

$$\frac{42}{60} > \frac{4}{60} > \frac{-30}{60} > \frac{-65}{60}$$

$$\frac{7}{10} > \frac{1}{15} > \frac{-1}{2} > \frac{-13}{12}$$

- Transformando las fracciones en los números decimales a los que equivale.

$$\frac{7}{10} = 7 : 10 = 0{,}7;\ \frac{-13}{12} = -13 : 12 = -1{,}0833\ ;\ \frac{1}{15} = 1 : 15 = 0{,}066\ ;\ \frac{-1}{2} = -1 : 2 = -0{,}5$$

$$0{,}7 > 0{,}066 > -0{,}5 > -1{,}083$$

$$\frac{7}{10} > \frac{1}{15} > \frac{-1}{2} > \frac{-13}{12}$$

Ejercicios nº 15 16 y 17 pg. 73

13.- SUMA Y RESTAS DE FRACCIONES.:

Distinguimos dos casos:

a. Tienen el mismo denominador.

La suma o resta de dos fracciones que tienen el mismo denominador, es otra fracción que tiene por denominador el mismo denominador y por denominador la suma o resta de los numeradores.

Ejemplo:

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\frac{a+c}{b} \qquad \frac{a}{b}-\frac{c}{b}=\frac{a-c}{b}$$

$$\frac{5}{14}+\frac{4}{14}=\frac{5+4}{14}=\frac{9}{14} \qquad \frac{5}{14}-\frac{4}{14}=\frac{5-4}{14}=\frac{1}{14}$$

b. Tienen distintos denominadores.

Para sumar o restar fracciones con distintos denominadores:

1. Debemos reducirlas a común denominador
2. Se suman o se restan como en el caso anterior.

Ejemplo:

$$\frac{3}{5}+\frac{1}{10}= \qquad \boxed{\begin{array}{l}5=5\cdot 1\\ 10=2\cdot 5\cdot 1\end{array}} \qquad \boxed{\text{m.c.m. (10 y 5)} = 2\cdot 5\cdot 1 = 10}$$

$$\frac{3}{5}+\frac{1}{10}=\frac{2\cdot 3}{10}+\frac{1\cdot 1}{10}=\frac{6}{10}+\frac{1}{10}=\frac{7}{10}$$

$$\frac{3}{5}+\frac{1}{10}= \qquad \boxed{\begin{array}{l}5=5\cdot 1\\ 10=2\cdot 5\cdot 1\end{array}} \qquad \boxed{\text{m.c.m. (10 y 5)} = 2\cdot 5\cdot 1 = 10}$$

$$\frac{3}{5}-\frac{1}{10}=\frac{2\cdot 3}{10}-\frac{1\cdot 1}{10}=\frac{6}{10}-\frac{1}{10}=\frac{5}{10}$$

Ejercicio resuelto nº 7 y ejercicios 18 y 19 pg. 74.

14.- SUMA Y RESTAS DE NÚMEROS ENTEROS Y FRACCIONES.:

Para sumar o restar un número entero y una fracción debemos:

1. Expresar el número entero como si fuese una fracción; para ello lo mejor es dividir al número entero por la unidad.

   Ejemplo:

   La fracción del número entero 4 es $\longrightarrow \frac{4}{1}$

   La fracción del número entero 5 es $\longrightarrow \frac{5}{1}$

2. Sumar o restar las fracciones con distinto denominador.

   $$3 + \frac{4}{5} = \frac{3}{1} + \frac{4}{5} = \frac{5 \cdot 3}{5} + \frac{1 \cdot 4}{5} = \frac{15}{5} + \frac{4}{5} = \frac{19}{5}$$

   $$3 - \frac{4}{5} = \frac{3}{1} - \frac{4}{5} = \frac{5 \cdot 3}{5} - \frac{1 \cdot 4}{5} = \frac{15}{5} - \frac{4}{5} = \frac{11}{5}$$

Ejercicio resuelto nº 8 y ejercicios 20 y 21 pg. 75

15.- MULTIPLICACIÓN DE FRACCIONES.:

El producto de fracciones es otra fracción que tiene:

- Por numerador el producto de los numeradores.
- Por denominador el producto de los denominadores.

  Ejemplo:

  $$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot c}$$

  $$\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{7} = \frac{3 \cdot 2}{5 \cdot 7} = \frac{6}{35}$$

  Ejercicios 24, 25 y 26 pg. 77

16.- FRACCIÓN INVERSA.:

Se dice que dos fracciones son inversas cuando su producto es igual a la unidad.

$\frac{a}{b}$ es una fracción inversa a $\frac{b}{a} \rightarrow \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = \frac{a \cdot b}{a \cdot b} = 1$

$\frac{3}{4}$ *es una fracción inversa a* $\frac{4}{3} \rightarrow \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{3} = \frac{3 \cdot 4}{4 \cdot 3} = \frac{12}{12} = 1$

Ejercicio resuelto nº 9. Ejercicios 27 y 28 Pg. 78.

17.- DIVISIÓN DE FRACCIONES.:

Dividir es multiplicar por el inverso. Para dividir dos fracciones se multiplica la primera fracción por la inversa de la segunda.

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} \rightarrow \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} \rightarrow \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$

Es decir; para dividir dos fracciones podemos utilizar los productos cruzados.

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} \rightarrow \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$

Ejercicio resuelto nº 10 y ejercicios 29 y 30 pg 79.

- Otra forma de representar una división.

$$\frac{\frac{5}{4}}{\frac{3}{2}} = \frac{5 \cdot 2}{4 \cdot 3} = \frac{10}{12}$$

18.- RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS.:

Para resolver este tipo de problemas lo más sencillo es realizar los siguientes pasos:

1. Leer atentamente el problema, para saber lo que nos dicen y lo que nos piden.
2. Escribir los datos haciendo un esquema.
3. Hacer el dibujo si se puede.
4. Realizar las operaciones.
5. Dar la solución.

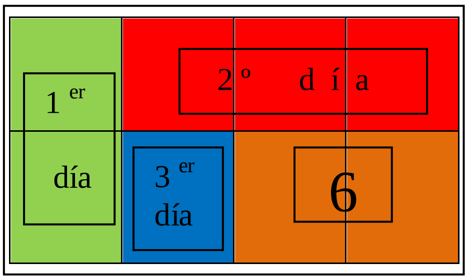
Ejemplo: A María le han regalado una caja de bombones. El primer día se come la cuarta parte de la caja, el segundo día la mitad de los bombones que quedaban; el tercer día, la tercera parte de los que le quedaban, y el resto que eran seis bombones se los dio a su amigo Pablo. ¿Cuántos bombones había inicialmente en la caja?

Primer día: comió un cuarto

Segundo día: la mitad de los tres cuartos.

El tercer día: un tercio de lo que quedaban

Al final quedan 6 bombones.



En el dibujo vemos que 6 bombones representan

$$\frac{2}{8}$$

Luego

$$\frac{1}{8} \; son\ 3\ bombones\ por\ lo\ tanto\ la\ caja\ tendrá\ 8 \cdot 3 = 24\ bombones.$$

$$ejercicios\ 31, 32\ y\ 33$$