TEMA 6: SISTEMAS DE ECUACIONES.

Segundo Curso de Educación Secundaria Obligatoria. I.E.S de Fuentesaúco.

Manuel González de León.

CURSO 2011 -2012

TEMA 6. SISTEMAS DE ECUACIONES::.

1. **Ecuaciones con dos Incógnitas.**
2. **Sistemas de ecuaciones. Soluciones de un sistema de ecuaciones.**
3. **Resolución de sistemas de Ecuaciones.**
4. **Problemas de Sistemas de Ecuaciones.**

1.- Ecuciones con dos Incógnitas::.

Llamamos ecuación con dos incógnitas a aquellas ecuaciones algebraicas en cuyos miembros hay dos letras (distintas) y números relacionados por operaciones aritméticas.

Ejemplo:

$$2x + y = 20$$

Las soluciones son pares de números que verifican la ecuación.

$x = 8$	$y = 4$

Ejercicio.

Hallar tres soluciones más a esta ecuación de dos incógnitas.

2.- Sistemas de ecuaciones. Soluciones de un sistema de ecuaciones::.

Llamamos Sistema de Ecuaciones al conjunto de dos o más ecuaciones necesarias para encontrar las soluciones a las incógnitas.

Un sistema de ecuaciones de 1er grado puede escribirse así.

$$\left.\begin{array}{l} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{array}\right\}$$

Los números a, b, a' y b' se llaman coeficientes de las incógnitas (x e y)

Los números c y c' se llaman términos independientes

La solución de un sistema de ecuaciones son los números que verifican todas las ecuaciones del sistema.

3.- Resolución de sistemas de Ecuaciones::.

Vamos a estudiar cuatro métodos.

1. Método de resolución por **TABLAS.**

   Se utiliza una tabla, dándose valores a "x" y a partir de él calculamos el valor de "y", y vamos viendo cuando se cumple la segunda ecuación.

   Ejemplo.

$$\left.\begin{array}{l} x + y = 10 \\ 14x + 8y = 104 \end{array}\right\}$$

x	1	2	3	**4**	5	6
y	9	8	7	**6**	5	4
14x + 8y	86	92	98	**104**	110	116

   Ejercicio resuelto nº 3 y ejercicios 7, 8 y 9

2. Método de resolución por **SUSTITICIÓN.**

   La aplicación de este método sigue los siguientes pasos:

   1. Despejamos una de las incógnitas en una de las ecuaciones.
   2. Sustituimos la expresión obtenida en la otra ecuación.
   3. Resolvemos la ecuación resultante.
   4. Calculamos la otra incógnita de la ecuación despejada.

Ejemplo:

$$\left.\begin{array}{l} 5x - 3y = 26 \\ 3x + 2y = 8 \end{array}\right\}$$

1. Despejamos una de las incógnitas en una de las ecuaciones.

   $5x = 26 + 3y \Longrightarrow x = \frac{26+3y}{5}$

2. Sustituimos la expresión obtenida en la otra ecuación.

   $3\left(\frac{26+3y}{5}\right) + 2y = 8$

3. Resolvemos la ecuación resultante.

   $\frac{78+9y}{5} + 2y = 8 \rightarrow 78 + 9y + 10y = 40$

   $9y + 10y = 40 - 79 \rightarrow 19y = -38$

   $y = \frac{-38}{19} \rightarrow y = -2$

4. Calculamos la otra incógnita de la ecuación despejada.

   $$x = \frac{26 + 3y}{5} \rightarrow x = \frac{26 + 3\cdot(-2)}{5} \rightarrow x = \frac{26 - 6}{5} \rightarrow x = \frac{20}{5} \rightarrow x = 4$$

3. Método de resolución por **REDUCCIÓN.**

   Se llama también método de reducción – sustitución

   La aplicación de este método sigue los siguientes pasos:

   1. Se igualan los coeficientes de una de las incógnitas, salvo el signo, eligiendo un múltiplo común de ambos.

      Puede ser el producto de los coeficientes de esas incógnitas.
   2. Se suman o restan según convengan las ecuaciones.
   3. Resolvemos la ecuación resultante.
   4. Calculamos la otra incógnita de la ecuación sustituyendo el valor obtenido en una de las ecuaciones del sistema.

      Ejemplo:

$$\left.\begin{array}{l} 7x - 4y = 18 \\ 5x + 8y = 2 \end{array}\right\}$$

   1. Se igualan los coeficientes de una de las incógnitas, salvo el signo, eligiendo un múltiplo común de ambos.

      Puede ser el producto de los coeficientes de esas incógnitas.

$$\left.\begin{array}{l} 7x - 4y = 18 \\ 5x + 8y = 2 \end{array}\right\}$$

Vamos a igualar los coeficientes de la incógnita "y" m.c.m.(4 , 8) = 8
8 : 4 = 2→ 2 · (7x – 4y =18)
8 : 8 = 1→ 1 · (5x + 8y = 2)

2. Se suman o restan según convengan las ecuaciones.

$$\begin{array}{rl} & \left.\begin{array}{l} 14x - 8y = 36 \\ 5x + 8y = 2 \end{array}\right\} \\ + & \\ \hline & 19x - 0y = 38 \end{array}$$

3. Resolvemos la ecuación resultante.

$$19x - 0y = 38 \qquad x = \frac{38}{19}$$

$$x = 2$$

4. Calculamos la otra incógnita de la ecuación sustituyendo el valor obtenido en una de las ecuaciones del sistema.

$$7x - 4y = 18 \qquad 7\cdot 2 - 4y = 18$$

$$14 - 4y = 18 \qquad -4y = 18 - 14$$

$$-4y = 4 \qquad y = \frac{4}{-4}$$

$$y = -1$$

4. Método de resolución por **IGUALACIÓN.**

La aplicación de este método sigue los siguientes pasos:

1. Se despeja una incógnita de una de las ecuaciones.
2. Se despeja la misma incógnita en la segunda ecuación.
3. Se igualan los valores de la incógnita despejada.
4. Resolvemos la ecuación resultante.
5. Calculamos la otra incógnita de la ecuación sustituyendo el valor obtenido en una de las ecuaciones del sistema.

Ejemplo.

$$\left.\begin{array}{l} 5x - 3y = 26 \\ 3x + 2y = 8 \end{array}\right\}$$

1. Se despeja una incógnita de una de las ecuaciones.

$$5x - 3y = 26 \qquad x = \frac{26 + 3y}{5}$$

2. Se despeja la misma incógnita en la segunda ecuación.

$$3x + 2y = 8 \qquad x = \frac{8 - 2y}{3}$$

3. Se igualan los valores de la incógnita despejada.

$$\frac{26 + 3y}{5} = \frac{8 - 2y}{3}$$

4. Resolvemos la ecuación resultante.

$$3 \cdot (26 + 3y) = 5 \cdot (8 - 2y) \qquad 78 + 9y = 40 - 10y$$

$$9y + 10y = 40 - 78 \qquad 19y = -38$$

$$y = \frac{-38}{19} \qquad y = -2$$

5. Calculamos la otra incógnita de la ecuación sustituyendo el valor obtenido en una de las ecuaciones del sistema.

$$x = \frac{8-2y}{3} \qquad x = \frac{8-2\cdot(-2)}{3}$$

$$x = \frac{8+4}{3} \qquad x = \frac{12}{3}$$

$$x = 4$$

4.- Problemas de Sistemas de Ecuaciones::.

Para resolver estos tipos de problemas debemos seguir los siguientes pasos:

1. Identificar las incógnitas.	2. Escribir en lenguaje algebraico cada una de las oraciones.	3. Plantear el sistema de ecuaciones	4. Resolverlo.	5. Comprobar el resultado.

1. Problemas de Edades.

1. Un padre tiene 32 años más que su hijo. Dentro de 6 años el padre tendrá el triple de la edad de su hijo. ¿Qué edad tiene cada uno?
   1. Identificar las incógnitas.

Edad del padre	p
Edad del hijo	h

   2. Escribir en lenguaje algebraico cada una de las oraciones.

Un padre tiene 32 años más que su hijo	Dentro de 6 años el padre tendrá el triple de la edad de su hijo
p = h + 32	p + 6 = 3 (h + 6)

   3. Plantear el sistema de ecuaciones.

$$\left.\begin{array}{l} p = h + 32 \\ p + 6 = 3\cdot(h+6) \end{array}\right\}$$

4. Resolverlo.

$$\left.\begin{array}{l} p = h + 32 \\ p + 6 = 3 \cdot (h + 6) \end{array}\right\}$$

Por sustitución.

$$h + 32 + 6 = 3 \cdot (h + 6)$$

$$h + 38 = 3h + 18$$

$$h - 3h = 18 - 38$$

$$-2h = -20 \qquad h = \boxed{\frac{-20}{-10}}$$

$$h = 10$$

$$p = h + 32 \qquad p = 10 + 32$$

$$p = 42$$

5. Comprobar el resultado.

El padre tiene 42 años y el hijo 10 años

2. Un padre tiene el triple de la edad que tiene su hijo. Dentro de 15 años tendrá el doble. ¿Qué edad tiene cada uno?

1. Identificar las incógnitas.

Edad del padre	p
Edad del hijo	h

2. Escribir en lenguaje algebraico cada una de las oraciones.

Un padre tiene el triple de la edad que tiene su hijo.	Dentro de 15 años tendrá el doble.
$p = 3h$	$p + 15 = 2(h + 15)$

3. Plantear el sistema de ecuaciones.

$$\left.\begin{array}{l} p = 3h \\ p + 15 = 2(h+15) \end{array}\right\} \text{Por sustitución}$$

4. Resolverlo.

$$3h + 15 = 2(h+15)$$

$$3h + 15 = 2h + 30 \qquad 3h - 2h = 30 - 15$$

$$h = 15 \qquad p = 3h$$

$$p = 3 \cdot 15 \qquad p = 45$$

5. Comprobar el resultado.

El padre tiene 45 años y el hijo 15 años

2. Problemas de dar y tomar.

1. Un pastor de dice a otro: "dame 80 ovejas y así tendré el doble que tu". El otro replica:"No, dame tu a mi 50 y así tendremos los dos las mismas". ¿Cuántas ovejas tiene cada pastor?

   1. Identificar las incógnitas.

Número de ovejas del 1er Pastor	a
Número de ovejas del 2º Pastor	b

2. Escribir en lenguaje algebraico cada una de las oraciones.

Dame 80 ovejas y así tendré el doble que tu.	Dame tu a mi 50 y así tendremos los dos las mismas
$a + 80 = 2 \cdot (b - 80)$	$a - 50 = b + 50$

3. Plantear el sistema de ecuaciones.

$a + 80 = 2 \cdot (b - 80) \rightarrow a + 80 = 2b - 160 \rightarrow a - 2b = -160 - 80 \rightarrow a - 2b = -240$

$a - 50 = b + 50 \rightarrow a - b = 50 + 50 \rightarrow a - b = 100$

$$\left.\begin{array}{l} a - 2b = -240 \\ a - b = 100 \end{array}\right\} \quad \boxed{\text{Por reducción.}}$$

4. Resolverlo.

$$\begin{array}{rl} & a - 2b = -240 \\ - & a - b = 100 \\ \hline \end{array}$$

$-b = -340 \rightarrow b = 340$

$a - b = 100 \rightarrow a - 340 = 100 \rightarrow a = 100 + 340 \rightarrow a = 440$

5. Comprobar el resultado.

Número de ovejas del 1er Pastor = 440 ovejas.

Número de ovejas del 2º Pastor = 340 ovejas.

2. En el bolsillo izquierdo tengo el doble de dinero que en el derecho. Pero si paso 7€ del izquierdo al derecho tengo el mismo dinero en cada bolsillo. ¿Cuánto dinero tengo en cada bolsillo?

1. Identificar las incógnitas.

Dinero en el bolsillo izquierdo	i
Dinero en el bolsillo derecho	d

2. Escribir en lenguaje algebraico cada una de las oraciones.

En el bolsillo izquierdo tengo el doble de dinero que en el derecho	Pero si paso 7€ del izquierdo al derecho tengo el mismo dinero en cada bolsillo.
$i = 2d$	$i - 7 = d + 7$

3. Plantear el sistema de ecuaciones.

$$\left.\begin{array}{l} i = 2d \\ i - 7 = d + 7 \end{array}\right\} \quad \boxed{\text{Por sustitución}}$$

4. Resolverlo.

$$\left.\begin{array}{l} i = 2d \\ i - 7 = d + 7 \end{array}\right\}$$

$2d - 7 = d + 7 \rightarrow 2d - d = 7 + 7 \rightarrow d = 14€$

$i = 2d \rightarrow i = 2 \cdot 14 \rightarrow i = 28€$

5. Comprobar el resultado.

Dinero en el bolsillo izquierdo = 28€

Dinero en el bolsillo derecho = 14€

3. Problemas basados en números.

1. La suma de dos números es 50 y su diferencia 26. Hallar dichos números.

$$\left.\begin{array}{l} x + y = 50 \\ x - y = 26 \end{array}\right\}$$

$2x = 76 \rightarrow x = \frac{76}{2} \rightarrow x = 38 \rightarrow y = 50 - 38 \rightarrow y = 12$

2. Un primer número es el 40% de un segundo número. Si al 1er número le añadimos 68 nos da lo mismo que si al segundo le añadimos 20. ¿Cuáles son esos dos números?

$$\left.\begin{array}{l} x = \frac{40}{100}\, y \\ x + 68 = y + 20 \end{array}\right\}$$

$$\frac{4}{10}\, y + 68 = y + 20 \rightarrow 4y + 680 = 10y + 200$$

$$4y - 10y = 200 - 680 \rightarrow -6y = -480 \rightarrow y = \frac{-480}{-6} \rightarrow y = 80$$

$$x = \frac{40}{100} \cdot 80 \rightarrow x = \frac{3200}{100} \rightarrow x = 32$$

3. La diferencia entre dos números es 1091. Si al número mayor lo dividimos entre el número menor, nos da 2 de cociente y 346 de resto. Hallar dichos números.

$$\left.\begin{array}{l} x - y = 1091 \\ x = 2y + 346 \end{array}\right\}$$

$2y + 346 - y = 1091 \rightarrow y = 1091 - 346 \rightarrow y = 745$

$x - 745 = 1091 \rightarrow x = 1091 + 745 \rightarrow x = 1836$